Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Différentielles et dérivées partielles secondes

Exercice 1

Calculer les différentielles suivantes, sans calculer des dérivées partielles, en utilisant les propriétés des différentielles de sommes, produits et composées:

$$\text{(a) } \mathrm{d}\left(\ln(xy)\right) \quad \text{(b) } \mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right) \quad \text{(c) } \mathrm{d}\left(\sin(x^2y)e^{x-y}\right)$$

Indication ▼ Correction ▼ [002635]

Exercice 2

1. Y a-t-il une fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
$$\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y?$$
2. Trouver les fonctions $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant à la condition
$$\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y.$$
Étant donnée alors la fonction b, déterminer toutes les fonctions g correspondantes.

Indication ▼ Correction ▼ [002636]

Exercice 3

Soit $g\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $g(1,1) = 3$ et dont la différentielle vaille

$$\mathrm{d}g = (2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Soit

$$h\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$$

l'application de classe C^1 définie par

$$h(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x^2y, xy^2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

1. Calculer $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v$.
2. Déterminer g à partir du calcul précédent et (1), et sans autre calcul.
3. Montrer que h est une bijection. (On pourra calculer explicitement h^{-1}.)
4. Déterminer explicitement $\mathrm{d}(g \circ h^{-1})$.
5. Calculer les matrixes jacobiennes $J_h(x,y)$ et $J_{h^{-1}}(u,v)$ et vérifier par un calcul direct que
$$J_h(x,y)J_{h^{-1}}(h(x,y)) = I_2,$$
où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Indication ▼ Correction ▼ [002637]

Exercice 4

Calculer les matrices hessiennes des fonctions f définies par les expressions suivantes sur leur domaine de définition naturel:

$$\sin(xyz), \quad \sin^2(y/x).$$

Indication ▼ Correction ▼ [002638]

Exercice 5

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient r et θ les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'association

$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

C'est "l'expression de f en coordonnées polaires". Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta). \tag{2}$$

Cette formule calcule "le Laplacien en coordonnées polaires." L'exercice ne dépend pas de la connaissance du Laplacien cependant.

Indication ▼ Correction ▼ [002639]

Exercice 6

Les variables étant notées x et t, trouver la solution générale $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de "l'équation des ondes", à savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Trouver ensuite la solution unique de l'équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x,0) = \sin x, \; \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x. \tag{4}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002640]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser les règles

$$d(f+g) = df + dg,$$
$$d(fg) = fdg + gdf,$$
$$d(f\circ h) = (f'\circ h)dh.$$

Indication pour l'exercice 2 ▲

Soient h, u, v des fonctions des deux variables x et y. Rappeler que

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}(u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

On va déterminer une primitive d'une forme différentielle de degré 1 par un changement de variables tel que, dans les nouvelles variables, la primitive soit presque évidente.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Rappeler que la matrice hessienne est la matrice constituée des dérivées partielles secondes.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Montrer que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}F.$$
2. Montrer que
$$r\frac{\partial F}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$
3. Montrer que
$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$
4. Utiliser ces résultats, puis calculer encore un peu pour obtenir le résultat souhaité.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Grace au changement de variables
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (x,y) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right),$$
la fonction f s'écrit $F(u,v) = f(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2})$. Montrer que pour que f soit solution de (3) il faut et il suffit que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \qquad (5)$$

2. Montrer que, si F satisfait à (5), il existe deux fonctions $g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$F(u,v) = g_1(u) + g_2(v).$$

3. Écrire la solution générale de (3) et expliquer la phrase: “En une dimension d’espace, toute solution de l’équation des ondes s’écrit comme somme d’une onde qui se déplace vers la droite et une qui se déplace vers la gauche.”

Correction de l'exercice 1 ▲

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\ln(xy)\right) &= \frac{\mathrm{d}(xy)}{xy} = \frac{x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}x}{x};\\
\mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right) &= (1+\sinh(yz))\mathrm{d}(xyz) + xyz\mathrm{d}(\sinh(yz))\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x + xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y + xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\
&\quad + xyz\cosh(yz)\mathrm{d}(yz)\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x + xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y + xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\
&\quad + xyz^2\cosh(yz)\mathrm{d}y + xy^2z\cosh(yz)\mathrm{d}z\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x\\
&\quad + xz(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}y\\
&\quad + xy(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right) &= \left(\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)\mathrm{d}(x^2y) + \sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}(x-y)\\
&= x^2\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y + 2xy\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x\\
&\quad + \sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x - \sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\
&= \left(x^2\cos(x^2y)x - \sin(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\
&\quad + \left(2xy\cos(x^2y) + \sin(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La forme différentielle $x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y$ de degré 1 n'est pas fermée car la forme différentielle de degré 2

$$d(x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y) = 2x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + 3x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

est non nulle. Par conséquent, une fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ du type cherché ne peut pas exister.

2. Une fonction b du type cherché doit satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$2x^2y - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

d'où $b(x,y) = \frac{2}{3}x^3y + k(y)$ où k est une fonction de la variable y. Une fonction g correspondante doit alors satisfaire aux équations différentielles partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^2y^2,\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2}{3}x^3y + k(y).$$

Il s'ensuit que g est de la forme $g(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^2 + K(y)$ où K est une fonction de la varriable y.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Un calcul immédiat donne $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = \mathrm{d}g$.

2. Par conséquent, $g = u + v + c$ où la constante c est déterminée par la condition

$$3 = g(1,1) = u(1,1) + v(1,1) + c = 1 + 1 + c$$

d'où $c = 1$.

3. Un calcul direct montre que l'application réciproque

$$k\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}$$

de h est donnée par la formule

$$k(u,v) = (x(u,v),y(u,v)) = \left(\left(\frac{u^2}{v}\right)^{1/3}, \left(\frac{v^2}{u}\right)^{1/3}\right).$$

4. $\mathrm{d}(g\circ k) = \mathrm{d}(u\circ k) + \mathrm{d}(v\circ k) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$ car $u(k(u,v)) = u$ et $v(k(u,v)) = v$.
5. Un calcul immédiat donne

$$J_h = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} & -\frac{u^{2/3}}{3v^{4/3}} \\ -\frac{v^{2/3}}{3u^{4/3}} & \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

d'où $J_h(x,y)J_k(h(x,y)) = I_2$.

Correction de l'exercice 4 ▲

$$\mathrm{d}\sin(xyz) = yz\cos(xyz)\mathrm{d}x + zx\cos(xyz)\mathrm{d}y + xy\cos(xyz)\mathrm{d}z$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} -y^2z^2\sin(xyz) & z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz) & y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz) \\ z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz) & -x^2z^2\sin(xyz) & x\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz) \\ y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz) & y\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz) & -x^2y^2\sin(xyz) \end{bmatrix}.$$

De même

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sin^2(y/x)) &= -2yx^{-2}\sin(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}x + 2x^{-1}\sin(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}y \\ &= \sin(2y/x)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) \end{aligned}$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} 2yx^{-3}\sin(2y/x) + 2y^2x^{-4}\cos(2y/x) & -x^{-2}\sin(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) \\ -x^{-2}\sin(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) & 2x^{-2}\cos(2y/x) \end{bmatrix}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial F}{\partial r} + r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$
2. $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{r}$
3. $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$
4. En prenant la somme des trois équations suivantes

$$\begin{aligned} r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ r\frac{\partial F}{\partial r} &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

on trouve le résultat cherché.

Correction de **l'exercice 6 ▲**

1. Avec $\frac{\partial}{\partial u} = 1/2(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ et $\frac{\partial}{\partial v} = 1/2(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ nous obtenons les identités
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\\ \frac{\partial F}{\partial v} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\end{aligned}$$
d'où pour que f satisfasse à l'équation (3) il faut et il suffit que F satisfasse à l'équation (5).

2. Supposons que F satisfasse à l'équation (5). Alors la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction disons h_1 seulement de la variable u et la fonction $\frac{\partial F}{\partial v}$ est une fonction disons h_2 seulement de la variable v. Par conséquent, $F(u,v) = g_1(u) + g_2(v)$ où $g_1' = h_1$ et $g_2' = h_2$.

3. La solution générale de (3) s'écrit alors
$$f(x,t) = g_1(u) + g_2(v) = g_1(x+t) + g_2(t-x).$$
La fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la droite et la fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la gauche.

   Enfin, pour trouver la solution unique satisfaisant aux condition initiales (4) nous constatons que les conditions initiales entraînent les identités
$$\begin{aligned}f(x,0) &= g_1(x) + g_2(-x) = \sin x\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= g_1'(x) - g_2'(-x) = \cos x\\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) &= g_1'(x) + g_2'(-x) = -\cos x\end{aligned}$$
d'où $g_1' = 0$ et $g_2'(-x) = -\cos x$, c.a.d. $g_2(x) = \sin(-x)$. Par conséquent, la solution unique cherchée f s'écrit
$$f(x,t) = \sin(x-t).$$